Publisert i Tangenten 3/2000, Caspar forlag, Bergen.

Ti delt på atten; korleis blir det, og kvifor blir det slik ?

Gunvor Sønnesyn

Korleis møter vi born som spør og vil vita *kvifor* vi gjer det slik eller slik i matematikken? Korleis går det med elevane sine haldningar til faget – og til det å utforska og finna ut dersom dei ofte må nøya seg med ”det berre *er* sånn”? Korleis kan vi som lærarar bidra til at borna får tak i det dei er på jakt etter når det gjeld å forstå?

Ein god kollega på ein annan kant av landet ringjer av og til for å drøfta ulike spørsmål ho har fått frå elevane sine – elevar som kjem til henne fordi dei har vanskar av eitt eller anna slag. For ikkje lenge sidan var problemstillinga slik: ”Når vi deler 81 på 3, då skriv vi 81:3 =, og så skriv vi 2 på tiarplassen i svaret. Men kvifor skriv vi det talet først? Og korleis veit vi at det er tiarplassen?”
Glupe spørsmål! Ikkje heilt lette å svara på, hadde det vist seg. Kollegaen ville drøfta det med andre – men ingen av dei ho spurde hadde tenkt så nøye over kvifor det var slik.
Lat dette vera ei utfordring til oss. Kva ligg bak eit slikt spørsmål? Korleis vi kan hjelpa elevane å finna svar?
Det kan liggja nær å sukka over matematikkundervisning som består i å læra borna algoritmer dei ikkje forstår. Kanskje hadde eleven vår forstått betre om han hadde fått høve til å utforska og finna svar utan å bruka ein fast oppsett måte å gjera det på. I vårt tilfelle var spørsmålet gitt for å få vita kvifor vi kan gjera det akkurat slik, og då er det *det* eleven vår vil ha svar på. Kanskje burde det vera eit minstekrav til oss lærarar at vi veit det – eller i alle fall at vi kan finna det ut?

I Tangenten 2/ 99 har Jostein Våge ein artikkel om å forstå og å forklara. Han syner til Skemp og Mellin Olsen og skil mellom instrumentell og relasjonell forståing. Slike eg ser det har ”vår elev” instrumentell forståing – han veit korleis han skal utføra rekneoperasjonen 10:18. Han ber om hjelp til å få ei relasjonell forståing – å forstå kvifor den gitte operasjonen fungerer, slik Våge definerer uttrykket. Eigentleg ber han om meir – han vil forstå sjølve operasjonen.
Våge har truleg rett når han hevdar at det duger ikkje berre å forklara og tru at då har eleven forstått.
Etter mitt syn er orda likevel viktige i å ”dela” forståing – men då ord som verkeleg gir meining både for den som forklarar og for den som skal forstå. Det vil sei at vi må ha kompetanse til å sjå kva forutsetningar som er nødvendige for at forklaringa vår skal føra til relasjonell forståing.
Det er ikkje nok at lærarar eller studentar får enkelte ”aha”-opplevingar på vårt nivå. Vi må også kunna leggja til rette for at elevane våre får alle dei ”aha”-opplevingar som er nødvendige for å forstå.

Konkret materiell.

Det vert ofte lettare for elevane å forstå om dei får bruka konkret materiale. For å få tak i kva som eigentleg skjer når 81 skal delast på tre er det for mange born avgjerande over lenger tid å ha gjort erfaringar med å gruppera antal . Det er også avgjerande å ha begrep om einarar og tiarar, einarplass og tiarplass – generalisert på grunnlag av mange erfaringar med ulike slag einarar og tiarar. Det er lett å ty til pengar, det er noko born oftast kjenner frå daglеglivet. Skal dei kunna generalisera – oppdaga kva alle einarar er like i og kva alle tiarar er like i, må dei ha arbeidd med einarar og tiarar av mange slag. Då kan dei generalisera; einarar er det vi tel ein om gongen, og tiarar det vi tel ti om gongen. Alt det er mogeleg å telja ein om gongen kan brukast som eksempel på einarar, og alt vi kan telja ti om gongen kan brukast som tiarar.

Publisert i Tangenten 3/2000, Caspar forlag, Bergen.

Korleis veit vi kva som er tiarplassen ?

Borna vil fort erfara at skal vi dela likt, så må vi starta med den største eininga. I vårt tilfelle er det tiarane. Har vi åtte tiarar som skal delast på tre, så vert det to heile til kvar. Det skriv vi der vi har bestemt oss for å skriva svaret, så slepp vi å hugsa det mens vi arbeider vidare. Vi skriv kor mange tiarar det vart til kvar. Då avgjer vi med det samme kva som er tiarplassen. Den plassen der vi skriv antal tiarar vert tiarplassen, og så er i neste omgang einarplassen gitt ut frå det. Har tre fått to tiarar kvar, så har vi brukt seks, og har to att. Det kan vi skriva i eit rekneskap slik det er vanleg, eller på ein annan måte dersom det synest lettare.
To tiarar og ein einar som vi hadde frå før, det kan vi tenkja som 21 einarar. Vi kan gjera det synleg med å veksla kvar tiar i ti einarar. Då vert det ikkje så vanskeleg å dela einarane i tre grupper. Kanskje kan eleven vår - lat oss kalla han Per - gangetabellen så godt at han veit at det vert sju til kvar. Viss ikkje må han dela ut og telja. Då finn han at det vert sju til kvar. 2-talet står alt på tiarplassen i svaret, då må antal einarar stå på einarplassen, ein plass lenger til høgre. Dette siste er kanskje ikkje så lett – det forutset at Per har begrep om sifferet sin plass i talet som symbol for antal einarar, tiarar, hundrarar osv.

Går det an med 10:18 ?

Per hadde fleire spørsmål, han. Det neste var slik: "Korleis blir det når vi skal dela 10 på 18?" Vanleg prosedyre for ei slik utrekning er om lag slik :
"10 delt på 18, det går ikkje. Det blir null, og null nede, og ti igjen, og så må vi setja til ein null slik at vi får 100:18, og skriva komma i svaret i svaret, og så bli det 5. 5*18 er 90, og då har vi brukt 90 av dei hundre, og har ti igjen. Så set vi ein ny null bakerst…", og det heile gjentek seg.
Men kvar kjem alle nullane frå ? Og kvifor skriv vi 0,.. i svaret ?

```
10 : 18 = 0,555
  0
100
 90
  100
   90
   100
    90
    10
```

Per vil forstå matematikkspråket.

Igjen kunne vi setja Per til å utforska – ta 10 bollar og dela det mest mogeleg likt på 18. Det ville han truleg klara. Men det spørs om han var nøgd med det. Per ville ha hjelp til å forstå matematikkspråket sitt uttrykk for dette – og ikkje minst – han ville vita kvar alle nullane kjem frå. Skal Per bli nøgd, må vi finna ut korleis vi kan gjera dette begripeleg for han.

Kva for einingar har Per bakgrunn for å arbeida med ?

Det blir viktig å finna ut kva slag einingar eleven vår har forutsetningar for å arbeida med. Arbeider vi med einarar, så er det heile vi skal dela 10, og vi får ikkje "ein einar til kvar" når det skal delast på 18. Vel vi å arbeida med tideler, så er det heile vi skal dela 100 tideler, og då vert det både ein og fleire tideler på kvar.
Vi har fleire måtar å skriva 100 tideler med tal. Vi kan til dømes skriva 100/10 eller 10,0. Kanskje har vi ikkje vore heilt bevisst på det siste alle gongene vi har sett til ein null bak komma - at det eigentleg symboliserer at vi har delt kvar einar i ti like store deler. I tilfellet over hadde vi ti einarar. Vi deler kvar einar i ti like store deler, og har 100 tideler. Vi har like mykje som før, men vi har gitt det ei anna nemning – vi arbeider med ei anna eining. Vi kan skriva 10=10,0 ; men leggja oss på minnet at då betyr 10,0 100 tideler. Kanskje vert det lettare å rekna med desimaltal når vi lærer elevane våre eit grunnlag for å forstå dette? Det kan også bidra til å unngå misoppfatninga at desimaltal er par av heile tal, noko som er beskrive av m.a. Brekke, NLS 1995 og Bell et al, NFER-Nelson, 1983.

> Dette har vore ubevisst hjå dei fleste av oss – kanskje så ubevisst at det ikkje utan vidare er semje om at det verkeleg er slik.

Publisert i Tangenten 3/2000, Caspar forlag, Bergen.

Vi må vita kva Per veit..

Lat oss seia at Per har begrep om heil og del av heil, han har begrep om tideler og hundredeler. Han forstår ein hundredel som ein av delene når ein heil er delt opp i hundre like store deler og tidel som ein del når den heile er delt i ti like store deler. Det har han lært ut frå mangfaldig erfaring med heile einingar som er delt i hundre like store deler og ti like store deler. Han har og begrep om at sifferet sin plass i talet symboliserer antal tusenar, hundrarar, tiarar og einarar på venstre side av komma, og tideler, hundredeler og tusendeler på høgre side av komma. Vidare har han leseferdigheit for desimaltal, og kan lesa 10,000 som ti komma null null null eller ti tusen tusendeler. Dette gjev eit grunnlag for meistring som kan læra Per at han får til matematikk, at matematikk er spennande og moro. Det gjev haldningar både til faget og til seg sjølv som ein som *kan.*

> Viten integrert med ferdigheiter utgjer evne til å velja strategi for å løysa eit problem.

Vi vel kva eining vi vil rekna med.

Då kan vi velja å skriva 10,000; og rekna med tusendeler. Vi har reknestykket 10,000:18, og les: "ti tusen tusendeler delt på atten". Vi får ingen heil einar til kvar, og skriv 0, i svaret. Vi har då hundre tideler å dela på atten. Det gir fem tideler til kvar, og skriv 5 på tidelplassen i svaret. Vi har brukt opp 90 av dei hundre tidelene, og har ti att. Vi gjer det om (vekslar, eller eigentleg deler kvar tidel i ti like store deler) til hundredeler – og har hundre hundredeler å dela på atten. Det blir fem hundredeler til kvar, og vi skriv 5 på hundredelsplassen i svaret. Vi brukar samme prosedyre – deler kvar hundredel vi ikkje har brukt i ti like store deler, og har hundre tusendeler å dela på 18. Slik kunne vi fortsetja og dela kvar tusendel i ti til titusendeler, i neste omgang titusendelene i ti til hundretusendeler osv. Då har vi eit fint utgangspunkt for å undra oss. Kor mange deler er det eigentleg mogeleg å dela ein heil i ? Kor nøyaktig svar treng vi ?

$$
\begin{array}{l}
10,000 : 18 = \underline{0,555} \\
\ \ \underline{0} \\
100 \\
\ \ \underline{90} \\
\ \ 100 \\
\ \ \ \ \underline{90} \\
\ \ \ \ 100 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{90} \\
\ \ \ \ \ \ 10
\end{array}
$$

Kan vi sjå ein tusendel ?

Med ein kvadratmeter millimeterpapir som det heile vi skal dela, i dette tilfellet 10; kan vi sjå einaren som 10 kvadratdesimeter (ein tidel av kvadratmeteren). Tidelen vert då ein kvadratdesimeter, hundredelen ti kvadratcentimeter og tusendelen ein kvadratcentimeter. Reknar vi då med tusendeler gir svaret oss antal kvadratcentimeter. Ville vi ha det meir nøyaktig kunne vi dela i titusendeler eller hundretusendeler, og finna kor mange "tikvadratmillimeter" eller kvadratmillimeter det vart på kvar av dei 18.

Gje rom for undring.

Tilbake til spørsmålet kor mange deler det er mogeleg å dela ein heil i. Vi veit at det er ikkje noko svar på det. Lat oss ta med slike spørsmål og – og undra oss saman med borna. Dette er også ein del av matematikken – det er ikkje slik at vi alltid har eit eksakt svar – at det alltid er ei løysing på eit matematisk problem. Vi kan velja kor langt vi vil gå - kor mange desimalar det gjev meining i å ta med. Det vil seia at vi vel kor mange gonger det gjev meining å dela det vi har att i ti like store deler. Vi kan ikkje med berre auga vårt sjå skilnad på 0,55 mm og 0,555 mm, men vi kan sjå at 0,55 og 0,555 m ikkje er det samme. Vi ser det endå betre om vi snakkar om skilnaden på 0,55 og 0,555 km.

Publisert i Tangenten 3/2000, Caspar forlag, Bergen.

Lat oss læra av elevar som spør !

Det er godt at vi har born som spør – slik at vi blir tvinga til å tenkja gjennom korleis det eigentleg er – og kvifor vi gjer ting slik vi gjer. Særleg i matematikken har vi som lærarar alt for lett for å gjennomføra ein prosedyre fordi vi har lært at det skal vera slik, og ikkje ut frå ei forståing av kvifor vi gjer det på denne måten – og kva alle tala og teikna vi skriv undervegs eigentleg står for.
Lat oss læra av elevane som spør – og saman med dei gå inn i utfordringa det er å finna svar og forstå.

MATEMATIKK-KUNNSKAP.

Vi har funne det nyttig å analysera matematikk-kunnskap ut frå Magne Nyborg sin modell av samspelet, interaksjonen, mellom den som lærer og situasjonen vedkommande er ein del av. I denne modellen, kalla PSI-modellen, peikar Nyborg på tre ulike strukturar i ein person sitt langtidsminne; viten, ferdigheiter og disposisjonar for å føla og for å vera motivert. Ut frå denne modellen kan vi beskriva matematikk-kunnskap som

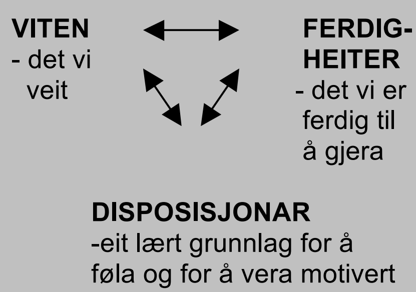
1 VITEN i form av

1.1 **forestillingar** om enkelttilfelle, det spesielle, t.d. antalet fem som fem fingrar

1.2 **begrep** om det generelle, t.d. viten om den delvise likskapen mellom alle grupper av ulike slag som har antalet fem; dei er like i antal

1.3 **begrepssystem,** begrep hierarkisk ordna, t.d. addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon under det overordna begrepet antals-operasjonar eller forandringar i antal

1.4 **utsagnsordna viten**, t.d. *to og to er fire,* eller *ein meter er hundre centimter.*



2 FERDIGHEITER, inklusive språkferdigheiter

2.2 **Perseptuelle ferdigheiter -** eit lært grunnlag for å persipera og kjenna att rekkjefølgjer av sanseinntrykk t.d. rekkjefylgja av tal i tregongen, eller rekkjefølgja av språklydar i talord og andre matematikk-uttrykk i talespråket.

2.3 **Motoriske ferdigheiter -** eit lært grunnlag for å utføra handlingar, dvs. rørsler i rekkjefylgje, t.d. å sei talord eller å skriva tal og andre matematikk-symbol.

2.4 **Perseptuelt-motoriske ferdigheiter -** eit lært grunnlag for å utføra handlingar knytt til persepsjon – til dømes høgtlesing, å skriva etter diktat, utføra algoritmer for å løysa problem i matematikken.

3 **DISPOSISJONAR** – eit lært grunnlag for å føla og vera motivert i forhold til matematikk.

Det er viktig å leggja merke til at desse tre let seg aktivisera av kvarandre, og er integrerte med kvarandre. Talordet fem og femtalet lærer vi å kjenna ved språkferdigheiter, men for at det skal gje meining må begge vera knytt til begrep om antalet fem. Som oftast er ord og andre symbol for oss vaksne så knytt til begrepa vi forstår dei med at vi ikkje alltid tenkjer over at meininga med orda ikkje "bur" i orda – men må lærast.

Når eleven spør – slik som i eksempelet over, må vi vurdera kva for viten, ferdigheiter og disposisjonar som er nødvendige for å meistra akurat dette. Vi må finna ut om han eller ho har lært dette – eller leggja til rette for at det blir lært, slik at eleven har forutsetningar for å løysa problemet. Borna har ofte språkferdigheiter til både å kjenna att og sjølve å seia orda vi brukar når vi skal forklara. Men det tyder ikkje alltid at dei har begrep knytt til orda, slik at dei forstår. Vi snakkar om ansvar for eiga læring, men akkurat dette – at borna lærer nødvendige begrep for å forstå – er vårt ansvar som pedagogar på ulike steg.

Publisert i Tangenten 3/2000, Caspar forlag, Bergen.

Gunvor Sønnesyn er dagleg leiar i stiftelsen INAP og driv firmaet Pedverket AS ved sida av arbeid som lærar i grunnskulen. Sønnesyn er lærar med vidareutdanning i begrepsundervisning og ferdigheitsopplæring, spesialpedagogikk, småskulepedagogikk og matematikk.

Referansar:
Brekke, Rettleiing til tal og talrekning, NLS 1995

Bell, Costello og Kücheman, A Review of Research in Mathematical Education. Part A: Research on Learning and Teaching, NFER-Nelson 1983

Mellin Olsen, Eleven, matematikken og samfunnet, NKI-forlaget 1984

Nyborg, Læringspsykologi i oppdragelses- og undervisningslære, Nordisk undervisningsforlag 1985

Nyborg, Pedagogikk, INAP-forlaget 1994

Nyborg, Matematisk språk, INAP-forlaget 1995

Skemp, Richard R., Mathematics teaching, The Association of Teachers of Mathematics 1976